3-бөлім	Раздел 3	Section 3
Бейсызық физикасы	**Нелинейная физика**	**Nonlinear Physics**

УДК 530.1

З.Ж. Жанабаев

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Казахстан, г. Алматы
E-mail: kazgu.kz@gmail.com

Критерии самоподобия и самоаффинности динамического хаоса

Работа посвящена выяснению вопроса: существуют ли количественные критерии реализации универсального явления самоорганизации в открытых системах? Самоорганизацию также называют возникновением порядка из хаоса при выполнении условий нелинейности, неравновесности, незамкнутости.

В настоящей работе определены значения информации в неподвижных точках функции плотности вероятности реализации информации I_1 и энтропии I_2. Раскрыт смысл этих величин в виде критериев самоаффинности и самоподобия хаотических процессов, энтропии Колмогорова – Синая, фрактальных размерностей соответствующих масштабно-инвариантных множеств.

Показано, что самоорганизация имеет место, если нормированная на единицу информационная энтропия S принимает значения в интервале $I_1 \leq S \leq I_2$, где $I_1 = 0.567$, $I_2 = 0.806$. Правомерность этих выводов доказана вычислением S для известных фракталов и указаны возможные приложения результатов в современных отраслях науки и техники.

Ключевые слова: информация, энтропия, фрактал, хаос, самоорганизация.

Z.Zh. Zhanabayev

Criteria of self-similarity and self-affinityof dynamical chaos

This work is devoted to study out the following question: does any qualitative criteria of realization of such universal phenomena as self-organization exist in open systems? Self-organization is also called the appearance of order from chaos under the conditions of non-linearity, non-equilibrium and non closure. Information entropy and fractal dimension of a set of physical values are usually used as quantitative characteristics of chaos. The more detailed characteristic of dynamical chaos is the Kolmogorov-Sinay entropy. Inhomogeneity of elements of a phase space can be taken into account by use of this characteristic. Technically, precise calculation of Kolmogorov – Sinay entropy can’t be realized. Uncertain questions are: What is the minimum of increasing of entropy, how much it decreases at self-organization? Also it was not ascertained the connection between entropy criterion of self-similarity and self-affine with fractal dimensions characterized corresponding chaotic processes.

In the paper the values of information at fixed points of probability function of density of information $I_1$and entropyI_2 have been defined.Physical meaning of these values as criteria of self-affinity and self-similarity in chaotic processes have been explained. The Kolmogorov-Sinay entropy and fractal dimensions corresponding to scale-invariant sets have been described also.

It is shown that self-organization occurs when normalized information entropy Stakes values in the interval $I_1 \leq S \leq I_2$, where $I_1 = 0.567$, $I_2 = 0.806$. The precision of these findings is proved by calculation the value S. Applications of these results in modern scientific and engineering areas are possible.
Keywords: information, entropy, fractal, chaos, self-organization.

З.Ж. Жаңабаев

Динамикалық хаостың өзұқсас және өзаффиндік критерийлері

Жұмыс мына сұрақты талқылауға арналған: ашық жүйелерде байқалатын әмбебап өзқауым құбылысының болуының сандық белгі-шарттары бар ма? Өзқауым құбылысын бейсызықтық, тепе-теңсіздік, тұйықталмағандық орындалғанда хаостан тәртіптің пайда болуы деп те қарастырады. Хаостың сандық сипаттамалары ретінде, әдетте, физикалық шаманың мәндері жиынының информациялық энтропиясын және фракталдық өлшемділіктерін қолданады. Динамикалық хаостың дәлірек сипаттамасы болып Колмогоров – Синай энтропиясы табылады, бұл шама фазалық кеңістік элементтерінің әртектілігін ескереді.

Алайда Колмогоров – Синай энтропиясын дәл есептеудің техникалық қиындықтары бар және мына сұрақтар жауапсыз қалуда: өзқауым кезінде энтропияның ең аз өзгерісі қандай, ол қаншалықты азаяды? Сонымен қатар хаосты сипаттайтын энтропиялық өзұқсастық және өзаффиндік белгі-шарттардың осы процестерге сәйкес фракталдық өлшемділіктермен байланысы белгісіз. Бұл жұмыста информацияның байқалу ықтималдығының тығыздық функциясының (I_1) және информациялық энтропияның (I_2) қозғалмайтын нүктелері анықталған. Бұл шамалардың мағынасы хаосты процестердің өзаффиндік, өзұқсастық белгі-шарттары және сәйкес фракталдық өлшемділіктері ретінде қарастырылған.

Егер бірлікке нормаланған информациялық энтропияның мәндері $I_1 \leq S \leq I_2$, $(I_1 = 0.567$; $I_2 = 0.806)$ интервалында жатса, өзқауым процесі байқалатындығы көрсетілген. Бұл қорытындылардың дұрыстығы белгілі модельдік фракталдардың бір буындарының S энтропиясын есептеу арқылы дәлелденген. S шамасын нормалаудың жолдары және алынған нәтижелердің қазіргі ғылым мен техниканың салаларында қолдану мүмкіндіктері көрсетілген.
Түйін сөздер: информация, энтропия, фрактал, хаос, өзқауым.

Введение

Дальнейшее развитие современных технологий нуждается в знании физических закономерностей, например, наноструктур, сверхвысокочастотных (гигагерцовых) хаотических сигналов, ансамбля нейронных сетей. Несмотря на разнообразную сложность перечисленных объектов и процессов, у них может проявляться единое общее свойство – масштабная инвариантность. Это означает отсутствие необходимости в параметрах с размерностью, например, длины. Масштабная инвариантность проявляется в виде самоподобия (коэффициенты подобия одинаковы по всем переменным) и самоаффинности (коэффициенты подобия различны по разным переменным). Общее название процессов различной природы с такими свойствами – самоорганизация материи и ее движения. Теорию самоорганизации называют синергетикой.

Самоорганизацию также называют возникновением порядка из хаоса при выполнении условий нелинейности, неравновесности, незамкнутости. Поэтому для простоты мы будем говорить об инвариантных свойствах хаотических процессов.

В качестве количественных характеристик хаоса обычно используют информационную энтропию и фрактальную размерность множества значений физических величин. Более детальной характеристикой динамического хаоса является энтропия Колмогорова – Синая, учитывающая неоднородность элементов фазового пространства. Известная теорема И. Пригожина утверждает, что при самоорганизации производная энтропии по времени стремится к минимуму. По теореме Ю.Климонтовича [1] при самоорганизации энтропия уменьшается, если сравнение произвести при одинаковых значениях энергии.

Однако непосредственный точный расчет энтропии Колмогорова – Синая технически не реализуется, упомянутые теоремы не отвечают на вопросы: каков минимальный прирост энтропии, насколько она уменьшается при самоорганизации? Также не выяснена связь между энтропийными критериями самоподобия и самоаффинности с фрактальными размерностями, характеризующими соответствующие хаотические процессы. Целью настоящей работы является поиск ответов на эти вопросы.

Информационные критерии масштабной инвариантности

Понятие информации широко используется в кибернетике, генетике, социологии. Развитие синергетики, физики открытых систем требует универсального определения информации, пригодного для использования в различных отраслях науки. Само определение открытой системы содержит понятие информации: открытой системой называется система, обменивающаяся с внешней средой веществом, энергией, информацией.

Обычно определение сложного понятия формируется через перечень его основных свойств. Информация $I(x)$ статистической реализации некоторой физической величины x является положительной величиной и определена при наличии неравновесности $I(x) \neq I(x_0)$, если $x \neq x_0$. Если $P(x)$ является вероятностью появления величины x, то выражение для количества информации

$$I(x) = -\ln P(x) \tag{1}$$

описывает эти свойства. Повторяемость и неравновесность процесса учитывается условием $0 < P(x) < 1$. С точки зрения различных наук предложено много определений информации. Формула (1) совместима со всеми этими определениями.

При наличии некоторого условия y информацию определяют через разность безусловной и условной энтропий:

$$I(x|y) = S(x) - S(x|y). \tag{2}$$

Эта формула используется для технических задач, например, для оценки пропускной способности каналов связи. Однако, сама информационная энтропия $S(x)$ является средним значением информации:

$$S(x) = \sum_i P_i(x) I_i(x) = -\sum_i P_i(x) \ln P_i(x), \tag{3}$$

где i– номер ячеек разбиения множества значенийx. Поэтому формулу (1)мы примем за основное определение информации.

Таким образом, хотя нет универсального определения информации, она используется для описания явлений различной природы. Поэтому возможен другой новый подход к теории информационных явлений. Можно принять за определенную независимую переменную саму информацию. Выражая статистические характеристики процесса через информацию, можно искать новые свойства информации, например, масштабно – инвариантные свойства.

После этого можно говорить о вероятности реализации информации $P(I)$ согласно формуле (1):

$$P(I) = e^{-I}. \tag{4}$$

Для плотности вероятности $f(I)$ имеем формулы

$$0 \le P(I) \le 1,\ 0 \le I \le \infty,\ \int_0^\infty f(I)\,dI = 1,\ P(I) = \int_I^\infty f(I)\,dI, f(I) = P(I) = e^{-I}. \tag{5}$$

Функция вероятности реализации информации $P(I)$ совпадает с функцией распределения плотности вероятности $f(I)$. Именно информация, определенная по формуле (1), обладает масштабной инвариантностью: часть и целое имеют одинаковый закон распределения. Информационную энтропию распределения значений информации $S(I)$ определяем как среднее значение информации:

$$S(I) = \int_I^{\infty} If(I)\,dI = (1+I)e^{-I}. \tag{6}$$

Для $0 \leq I \leq \infty$ имеем $1 \geq S \geq 0$, т.е. энтропия нормирована на единицу. Известно, что энтропия непрерывного множества при скачкообразном изменении переменных бесконечна и поэтому интеграл вычисляется в смысле Лебега путем введения некоторой меры. В качестве меры мы приняли саму информацию и получили результат (6).

Воспользуемся известным функциональным уравнением, которому удовлетворяет некоторая характерная функция $g(x)$ с масштабно – инвариантным свойством:

$$g(x) = \alpha g(g(x/\alpha)), \tag{7}$$

где α – масштабный множитель. Любая непрерывная функция в своей неподвижной точке удовлетворяет уравнению (7). Принимая в качестве характерных функций $f(I)$ и $S(I)$, определим их неподвижные точки:

$$f(I) = I,\ e^{-I} = I,\ I = I_1 = 0.567\,, \tag{8}$$

$$S(I) = I,\ \ (1+I)e^{-I} = I,\ I = I_2 = 0.806\,. \tag{9}$$

Эти неподвижные точки являются единственно устойчивыми, так как они являются также и пределами бесконечных отображений, достигаемых при любых начальных значениях I_0:

$$I_{i+1} = f(I_i),\ \lim_{i\to\infty} exp(-exp(\ldots - exp(I_0)\ldots)) = \mathrm{I}_1, \tag{10}$$

$$I_{i+1} = S(I_i),\ \lim_{i\to\infty} exp(-exp(\ldots - exp(\ln(I_0+1) - I_0)\ldots)) = \mathrm{I}_2, \tag{11}$$

где число скобокравно $i+1$.

Возможны различные толкования физического смысла чисел $I_1 = 0.567$, $I_2 = 0.806$. Плотность вероятности является локальной (мгновенной) характеристикой, поэтому она может быть различной по разным переменным и число I_1 можно принять за критерий самоаффинности. Энтропия – усредненная характеристика, поэтому число I_2 является критерием самоподобия.

С другой стороны, числа I_1, I_2 могут быть рассмотрены как аналоги числа Фиббоначчи $I_{20} = 0.618$ (“золотого сечения” динамической меры), соответственно, для статистических самоаффинных и самоподобных систем. Действительно, из формулы (9) при $I \lesssim 1$ имеем

$$(1+I)(1-I) = I,\ I^2 + I - 1 = 0,\ I = I_{20} = 0.618\,, \tag{12}$$

также при $I \ll 1$ из (9) имеем $e^{-I} = I,\ I = I_1$. Мы видим, что закономерности подобия самоаффинности, динамического равновесия, самоподобия систем описываются одной формулой (9).

Связь чисел I_1, I_2 с фрактальными и мультифрактальными размерностями специальных множеств и энтропией Колмогорова – Синая рассмотрим отдельно.

Энтропия Колмогорова – Синая фрактальных множеств

Пусть $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t))$ – траектория динамической системы на странном (фрактальном) аттракторе и m – мерное фазовое пространство разделено на ячейки размера l^m. Если $P_{i_0,\ldots,i_n}$ – совместная вероятность того, что $x(t=0)$ находится в ячейке i_1, $x(t=\tau)$ – в ячейке $i_2, \ldots$, $x(t+(n-1)T)$ – в ячейке i_n, τ – интервал времени измерения состояния системы, то энтропия Шеннона определяется как

$$S_n = -\sum_{i_1,\ldots,i_n} P_{i_1,\ldots,i_n} \ln P_{i_1,\ldots,i_n}. \qquad (13)$$

Энтропия Колмогорова – Синая S (KS – энтропия) определяется как средняя скорость потери информации [2]:

$$S = \lim_{\tau\to 0}\lim_{l\to 0}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N\tau}\sum_{n=1}^{N}(S_{n+1} - S_n) =$$

$$= -\lim_{\tau\to 0}\lim_{l\to 0}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N\tau}\sum_{i_1,\ldots,i_N} P_{i_1,\ldots,i_N}\ln P_{i_1,\ldots,i_N}. \qquad (14)$$

В случае дискретности шага по времени принимается $\tau = 1$ и предел $\tau \to 0$ опускается. По смыслу τ представляет собой характерное время и нелинейно зависит от l.

Естественно поставить вопрос: существует ли постоянное определенное значение KS–энтропии? Прежде всего необходимо выяснить условия постоянства произведения $N\tau$ для масштабно – инвариантных пространственных и временных явлений.

По определению фрактальной размерности D некоторой фрактальной меры $N(l)$, зависящей только от одного масштаба измерения самоподобного множества имеем

$$N(l) = l^{-D},\ D = \lim_{l\to 0}\frac{\ln N(l)}{\ln(1/l)}. \qquad (15)$$

Мы можем выбрать в качестве $N(l)$ число переменных иерархической системы на этапе эволюции с минимальным характерным масштабом l. Самоаффинные множества переменных различной природы(например, координаты и времени) описываются показателем Херста H (H называется также показателем аффинности):

$$\frac{R}{\sqrt{\langle x^2(t)\rangle}} = \tau^H,\ R(\tau) = \max_{1\le t\le\tau} x(t,\tau) - \min_{1\le t\le\tau} x(t,\tau). \qquad (16)$$

Для чисто стохастического броуновского движения $H = 1/2$. Для хаотических явлений $1/2 < H < 1$. Известны формулы

$$D = 1/H,\ D = 2 - H, \qquad (17)$$

соответственно для самоподобных и самоаффинных случаев, которые следуют из требования масштабной инвариантности обобщенного (“дробного”) броуновского движения [3].

Принимая безразмерную переменную l в виде $l = (\langle x^2(t)\rangle)^{1/2}/R$ из формул (15), (16), (17) получим

$$N\tau = l^{-D} l^{-1/H} = l^{-2D} = N^2, \tau = N. \quad (18)$$

Как ожидалось, самоподобие достигается при равенстве выбранных безразмерных масштабов времени и количества переменных. В этом случае можно принять $\tau = 1$.

Для самоаффинного случая имеем

$$N\tau = l^{-D} l^{-1/(2-D)} = l^{-D_*}, \; D_* = D + 1/(2-D), \quad (19)$$

где D_* может иметь смысл некоторого эффективного значения фрактальных размерностейсамоаффинного множества. Отсюда следует возможность связи KS – энтропии с фрактальными и мультифрактальными характеристиками.

Из формулы Реньи для мультифрактальной размерности меры $N(q,l)$ имеем

$$D_q = \lim_{l\to 0} \frac{1}{q-1}\frac{\ln N(q,l)}{\ln l}, \; N(q,l) = \sum_{i=1}^{N} P_i^q(l), \quad (20)$$

где q – порядок мультифрактального момента. Если дополнительно учесть переходы к пределам для случая $i = (i_1, \ldots, i_N)$, $N \to \infty, \tau \to 0$, то из формулы (20) при $q \to 1$ получим

$$D_{q\to 1} = D_1 = \lim_{l\to 0} \frac{S(l)}{\ln(1/l)} = S_1, \quad (21)$$

где $S(l)$ – выражение (14), записанное без указания предела $l \to 0$. В многомерном случае $S(l)$ вычисляется через суммирование по индексам $i_1, \ldots, i_N$.

Далее, чтобы сопоставить S_1 и S_{KS} мы выясним возможности равенства величин $N\tau$ и $\ln(1/l)$. Для этой цели учтем, что самоаффинность характеризуется множеством значений фрактальной размерности $D_i, i = 1,2, \ldots$. Тогда нормированное по D_{*i} значение $(N\tau)_*$ определяется как $l^{-D_*} = \sum_i l^{-D_{*i}}$. В случае непрерывного спектра D_* имеем

$$(N\tau)_* = \int l^{-D_*} e^{-D_*} dD_* = \ln(1/l). \quad (22)$$

Эти рассуждения показывают возможность $S_{KS} = S_1$.

С другой стороны, из известной теории мультифрактальной спектральной функции $f(\alpha(q))$ следует

$$f(\alpha(q)) = q\alpha(q) + \tau(q),\ \tau(q) = (1-q)D_q,\ \alpha(q) = -\frac{d\tau(q)}{dq},$$

$$\alpha(q=1) = \alpha_1,\ f(\alpha(q=1)) = f_1,\ D_1 = \alpha_1 = f_1 = S_1\,, \tag{23}$$

где α – показатель сингулярности ячейки множества (показатель Липшица – Гёльдера), $f(\alpha)$ - фрактальная размерность множества ячеек с одинаковыми значениями α. По самому определению фрактальные характеристики D_1, α_1, f_1 не зависят от l, следовательно, S_1тоже не зависит от l.

Таким образом, KS – энтропия, вычисленная по нормированному значению $N\tau_*$ равна самоподобному значению (неподвижной точке) информационной энтропии, т.е. числу I_2. Критерий I_1 является неподвижной точкой функции плотности вероятности информации (“локальной энтропии”), поэтому является самоаффинным значением KS – энтропии.

Приложения критериев самоподобия и самоаффинности

Интервал значений нормированной энтропии Шеннона $I_1 \leq S_n / S_{n_{max}} \leq I_2$ определяет самоорганизованный процесс включая его режимы самоаффинности и самоподобия. Этот факт облегчает физический анализ хаотических сигналов в наноэлектронике, астрофизике, биофизике и т.д. Для одномерного сигнала $S_{n_{max}}$ равно энтропии равнобедренного треугольного импульса. В многомерном случае можно использовать нормированную мультифрактальную спектральную функцию $f(\alpha_1) = \alpha_1$ вместо S_n, т.к. $f_{max}(\alpha) = D_0$ и Хаусдорфова размерность D_0 вычисляется стандартными алгоритмами.

Числа I_1, I_2 определяют фрактальные меры самоаффинных и самоподобных явлений. Под мерой понимаем количественную характеристику любого аддитивного и измеримого множества. Фрактальная мера определяется как

$$M = M_0 l^{-(D-d)} = M_0 l^{-\gamma}, \tag{24}$$

где d – топологическая размерность носителя меры, M_0 – нефрактальная (регулярная) мера. Определим значения $\gamma = D - d$ через I_1, I_2. Примем обозначения d_{max} – наибольшее целочисленное значение D, $D_{max} = d_{max} + 1$, $I_* = (I_1, I_2)$. Возможны случаи

$$D = d_{max} + I_*, \gamma = D - d = d_{max} - d + I_*, d = 0,1,2,3; \tag{25}$$

$$D = D_{max} - I_* = d_{max} + 1 - I_*,\ \gamma = d_{max} - d + 1 - I_*, d = 0,1,2,3. \tag{26}$$

Формула (25) применима при “наружной” фрактализации, т.е. при расположении фрактальной меры вне регулярной меры. Этот случай можно рассматривать также как одномерный безусловный случай, соответствующий безусловным вероятностным процессам. При этом вместо D можно пользоваться информационной размерностью $D_1 = S_1 = I_2$. Согласно формуле (23) D_1 удовлетворяет условию самоподобия. Формула (26) соответствует “внутренней” фрактализации. Появление слагаемого $1 - I$ можно обосновать, рассматривая размерность горизонтального сечения хаотического объекта [3].

Формулу (26) можно обосновать также из следующих рассуждений. Дробная часть фрактальной размерности равна минимальной информации, определенной в единицах $1/l$:

$$D - d_{max} = \frac{\log_{1/l} N(l)}{\log_{1/l}(1/l)} = -\log_{1/l} P(l) = I. \tag{27}$$

С другой стороны, в формуле (2) безусловная энтропия $S(x)$ всегда больше, чем условная энтропия $S(x/y)$ и нормируя все величины на $S(x)$, имеем

$$I = 1 - S, \; D - d_{max} = 1 - I_*, \tag{28}$$

где приняты масштабно-инвариантные значения $S = I_*$.

Общее число возможных значений γ для формулы (25) определяется как

$$N_\gamma = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j\le i}^{4} \sum_{k=1}^{2} (d_{max,i} - d_j) = 2 \sum_{i\ge j=1}^{4} (d_{max,i} - d_j) = 2 \sum_{n=1}^{4} n = 2 \cdot \frac{4(4+1)}{2} = 20. \tag{29}$$

Такое же значение N_γ дает формула (26). Если использовать также значение числа Фибоначи, т.е. принять $I_* = I_1, I_2, I_{20}$, то $N_\gamma = 30$. I_{20} имеет смысл переходного значения I_*от I_1 к I_2.

Таким образом, мы имеем возможность использовать 20 точных значений фрактальной размерности D для каждого типа (внешней к внутренней фрактализации) задач. Если учесть, что определение фрактальной размерности D представляет отдельную задачу и известные методы ее определения из опыта обеспечивают точность, не превышающей порядка одного процента, то использование чисел I_1, I_2 значительно облегчает эту проблему.

Приведем примеры использования формул (25), (26). Пусть необходимо моделировать, или описать эксперименты по оптике квантовых нитей на поверхности. Тогда $d_{max} = 2$, $d = 1$, по формуле (25) имеем $\gamma = 1 + 0{,}567$ для самоаффинного процесса, $\gamma = 1 + 0{,}806$ для самоподобного процесса. Если необходимо описать электрические явления в среде, то следует пользоваться формулой (26).

Выводы настоящей работы можно проверить, вычисляя энтропию Колмогорова – Синая для различных фракталов. Геометрические фракталы являются удобными моделями иерархической динамической системы, так как каждое поколение фрактала можно сопоставить эволюционному уровню.

Мы выделим два варианта сравнения теории с численным экспериментом. Первый подход может быть основан на вычислении – энтропии только для одного звена фрактала по формуле (6).

$$S = (1 + I)e^{-I} = (1 + D\ln(1/l))e^{-D\ln(1/l)}. \tag{30}$$

где, в отличие от формулы (27), информация определена через натуральный логарифм. Второй подход предполагает вычисление -энтропии по формуле (14) для множества n поколений фрактала.

На рисунке представлена зависимость $S(D)$ согласно формуле (30). Названия фракталов общепринятые [4]. Согласно формуле (17) при $D > 1{,}5$имеем $H < 1/2$ (случаи отсутствия вероятностного поведения процесса) и необходимо пользоватся согласно (28) информацией вместо энтропии. Эти замены указаны стрелками. Расхождения $S > I_2$ связаны с тем, что этот график получен для дискретной модели одного звена, а критерии I_1, I_2 получены по теории непрерывных изменении энтропии.

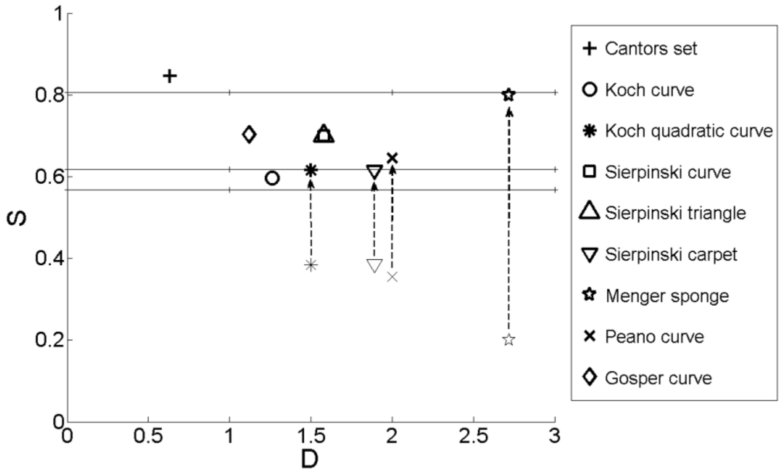

Рисунок – Нормированные энтропии одного звена модельных фракталов

Более близкие результаты к теории можно ожидать при использовании второго подхода, так как в этом случае мы рассматриваем множество фрактальных звеньев, у которых более четко проявляются статистические закономерности.

Заключение

Мы показали, что хаотические процессы и объекты могут быть количественно классифицированы на самоаффинные и самоподобные. Соответствующие критерии I_1, I_2 являются значениями энтропии Колмогорова – Синая, определяют характерные фрактальные меры. Существование этих критериев масштабной – инвариантности также доказывается соответствующей обработкой результатов экспериментальных исследований хаотических процессов различной природы (турбулентность, радиоизлучение Солнца, оптическое излучения переменных звезд и др.).

References

1 KlimontovichYu.L. Information Conserning the States of Open Systems // PhysicaScripta. – 1998. – Vol. 58. – P.549.

2 Slomczynski W., Kwapier J., Zyczkowski K. Entropy Computing Via Integration over Fractal Measures // Chaos. – 2000. –Vol. 10, №1. -P. 180-188.

3 Piotzonero L., Tosatti E. Fractals in Physics // Elsiever Science 1986.

4 Feder J. Fractals. – New York:Plenum press, 1988.